SESSION 2013

SECOND CONCOURS

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PHYSIQUE - MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices de poche à alimentation autonome, sans imprimante et sans document d'accompagnement est autorisé. Une seule calculatrice à la fois est admise sur la table. Aucun échange n'est permis entre les candidats.

Si vous repérez une erreur dans l'énoncé, le signaler dans votre copie.

L'énoncé comporte 6 pages.

Les trois parties sont totalement indépendantes. Les sous-parties sont largement indépendantes.

I - Gouttes

Lorsqu'un liquide est déposé sur une surface plane horizontale, il forme généralement une goutte s'il n'y a pas trop de liquide ou une flaque, si son volume est important. La ligne ou se rejoignent les trois phases solide/liquide/gaz et appelée ligne triple. Par exemple, pour une goutte ayant une symétrie de révolution, cette ligne tripe est un cercle de rayon a. L'angle que fait l'interface liquide-vapeur avec le plan solide en un point de la ligne triple est appelé angle de contact et noté θ.

Partie 1 - Mesure de l'angle de contact par la méthode de la reflexion

On considère le dispositif représenté sur la figure 1 : une goutte de liquide ayant une symétrie de révolution autour d'un axe Oz est posée sur un plan solide $z = 0$. Elle est éclairée par un faisceau laser parallèle, élargi, d'axe Oz et de diamètre $2a$. La trace du faisceau réfléchi par la goutte sur un écran semi-transparent placé à une hauteur $z = h$ est un cercle d'axe Oz et de diamètre $D \gg 2a$.

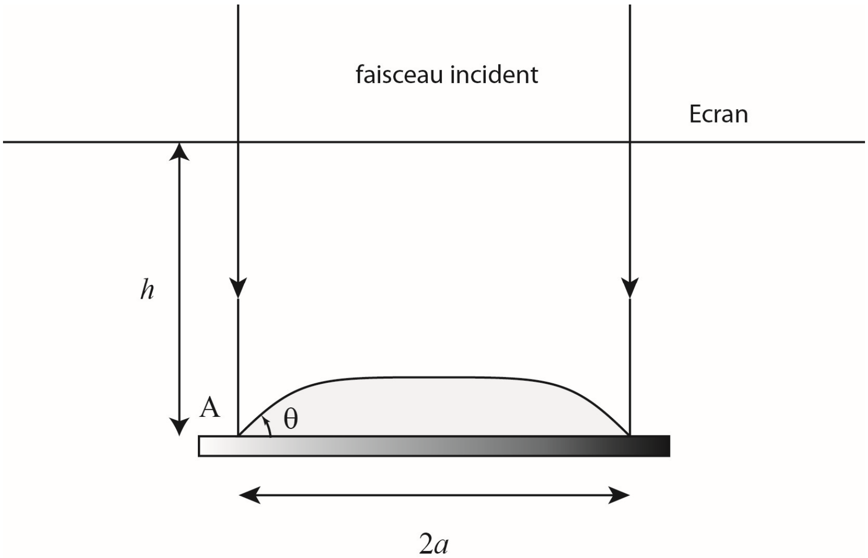

Figure 1: Dispositif de mesure des angles de contact par reflexion.

1. Le diamètre du faisceau issu du laser est $d_0 = 1\ \mathrm{mm}$. Proposer un dispositif expérimental construit à l'aide d'une lentille mince convergente de focale $f_1 = 1\ \mathrm{cm}$ et d'une lentille convergente de distance focale $f_2$qui permette de fabriquer un faisceau parallèle de diamètre $d = 2a = \ 5\ \mathrm{mm}$, à partir du faisceau directement fourni par le laser (faire un schéma).
2. Soit un rayon incident arrivant sur le bord de la goutte, au point A. On considère que le rayon se réfléchit sur l'interface liquide-air qui se comporte comme un miroir. Calculer l'angle que fait la rayon réfléchit par rapport à l'axe Oz.
3. En déduire le diamètre D que fait le cercle constitué par l'intersection de tous les rayons réfléchis sur tous les points A sur l'écran. Pour du verre traité, on mesure $D = 4.2\ \mathrm{cm}$ pour $h = 12\ \mathrm{cm}$ et $d = 2a = \ 5\ \mathrm{mm}$.
4. Faire un dessin pour représenter qualitativement ce que l'on observe sur l'écran. Justifier.

Partie 2 – Forme d'une flaque

Lorsqu'un goutte est suffisamment grande, elle devient une véritable flaque aplatie par la gravité. On cherche à obtenir la forme d'une flaque sur un plan solide horizontal d'équation $z = 0$. Pour simplifier, on supposera que le profil $z = e(x)$ est indépendant de y et de la longueur L dans la direction de y alors que la flaque est supposée semi-infinie dans la direction Ox. On note $\alpha(x)$ l'angle que fait sont plan tangent avec le plan horizontal. On prend l'origine des abscisses au bord gauche de la flaque sur la ligne triple. On a $\alpha(x=0)=\theta$. On note e_0 l'épaisseur de la flaque pour x très grand, l'angle αétant alors nul. La masse volumique du liquide est uniforme et est notée ρ.

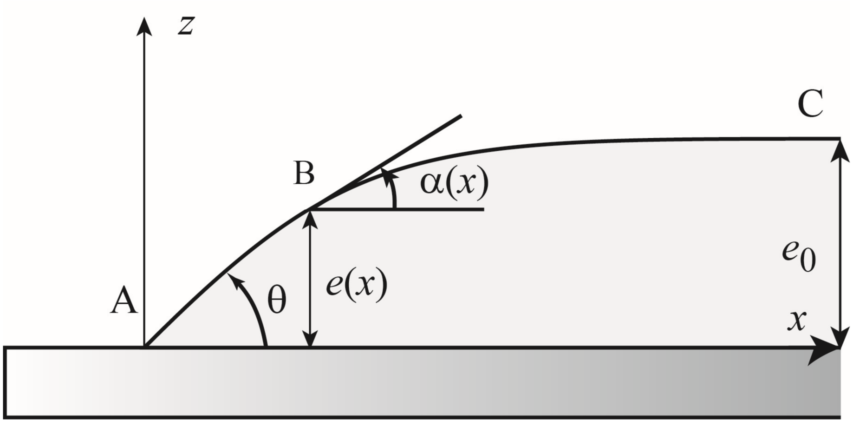

Figure 2: Bord de flaque.

1. Le liquide de masse volumique constante ρ est supposé en équilibre dans le champ de pesanteur caractérisé par l'accélération de la pesanteur $g=9{,}81$ m.s^{-2}. On admet qu'au sommet de la flaque, la pression dans l'eau est égale à la pression atmosphérique P_0. Exprimer $P(z)$ en un point $M(x,y,z)$ en fonction de g, ρ, P_0, e_0 et z.
2. En considérant un élément de surface dS de l'interface liquide-gaz, au voisinage du point B (correspondant au liquide compris entre les cotes z et $z+dz$ et aux absisses x et $x+dx$), comme une parois, montrer que la composante selon $0x$ des forces de pression est égale à $\rho gLdz(z-e_0)$.
3. En déduire l'expression de la composante des forces de pression selon l'axe $0x$ de la partie de l'interface comprise entre $z=0$ et $z=e(x)$ (partie AB).
4. L'interface AB subit en plus les forces de tension de surface de module $L\gamma$ en B et de module $L\gamma_{SL}$ en $L\gamma_{SG}$ en A où γ est la tension superficielle liquide-gaz et γ_{SL} et γ_{SG} respectivement les tensions superficielles solide-liquide et solide-gaz. Sachant que les forces de tension superficielles sont des forces par unité de longueur qui tendent à diminuer les aires des interfaces, en déduire la composante suivant Ox de la somme des forces de tension superficielle subie par la partie AB de l'interface. Faire un dessin.
5. En considérant que le profil est à l'équilibre, en déduire une équation vérifiée par le profil $e(x)$ en fonction des paramètres du problème.

II- Mécanique

Le théorème du viriel affirme que si un point matériel $M(x,y,z)$ possède une énergie potentielle $E_p(x,y,z)$ vérifiant la propriété suivante :

$$E_p(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^k E_p(x,y,z) \tag{1}$$

Pour tout réel λ, alors il est possible d'écrire la relation suivante entre les valeurs moyennes temporelles au cours du mouvement de M : $k\langle E_P\rangle = 2\langle E_c\rangle$ à condition que la trajectoire soit bornée et en notant E_c l'énergie cinétique de cette particule. On note $\langle f\rangle$ la valeur moyenne d'une fonction au cours du temps f. Nous ne considérerons que des mouvements périodiques. Les moyennes seront donc considérées sur une période.

Dans toute la suite, on considère l'étude du mouvement faite dans un référentiel R auquel est associé un repère orthonormé (O, x, y, z).

Partie 1 : cas du pendule simple

On considère un point matériel de masse m au bout d'une tige rigide de ma négligeable et de longueur l. On note g l'accélération de la pesanteur (figure 1.)

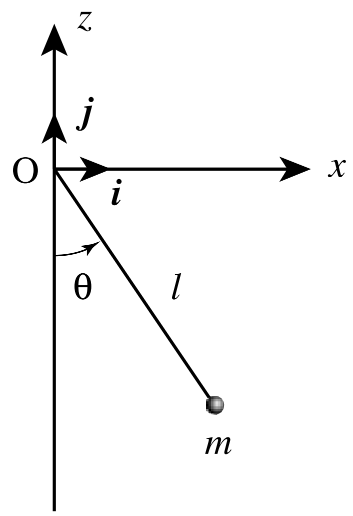

Figure 3 : Pendule simple.

1. Calculer l'énergie potentielle du pendule $E_p(\theta)$, en fonction des paramètres m, l, g et θ. L'énergie potentielle sera choisie nulle au point le plus bas du mouvement.
2. Calculer l'expression de l'énergie cinétique $E_p(\theta,\dot{\theta})$ ou $\dot{\theta} = d\theta/dt$ est la dérivée temporelle de θ en fonction des deux variables et de m, l, g.
3. On se place dans l'approximation des petits angles, c'est-à-dire $\theta \ll 1$.
   a. Simplifier les expressions de $E_p(\theta)$ et de $E_p(\theta,\dot{\theta})$. En déduire que θ est solution d'une équation différentielle du second ordre de la forme :
   $$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$
   b. Si on lâche le pendule sans vitesse initiale, avec un angle θ_0, quel est l'équation du mouvement du pendule ? En déduire l'expression de l'énergie cinétique E_c(t) et de l'énergie potentielle $E_p(t)$ au cours du temps.
   c. On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f périodique de période T est donnée par l'équation :
   $$\langle f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$
   Quelles sont les valeurs moyennes $\langle E_P \rangle$ et $\langle E_c \rangle$. Quelle relation vérifient-elles ?
   d. Montrer qu'on aurait pu retrouver cette équation en utilisant l'équation du viriel (1).

Partie 2 : cas des satellites

On considère un satellite (S) de masse m se trouvant à une distance r du centre O de la terre. On note G la constante de gravitation, M_t la masse de la terre.

1.a. Comment s'écrit la force subie par le satellite ?

b. Détérminer l'énergie potentielle $E_p$du satellite (avec la convention $E_p = 0$ à l'infini).

c. Comment s'exprime ici le théorème du viriel ? Quelle propriété de l'énergie mécanique retrouve-t-on dans un été lié ?

d. Dans le cas où la trajectoire du satellite est circulaire de rayon r_0, déterminer sa vitesse v_c.

On admettra pour la suite, que le satellite est lancé d'une distance r_0 avec une vitesse orthoradiale de module $v_0 = \alpha\sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$ avec $1 < \alpha < \sqrt{2}$.

2.a. En utilisant le théorème du moment cinétique, justifier que le mouvement du satellite est plan. Vous montrerez, aussi que la quantité $r^2\frac{d\theta}{dt}$ est une constant que l'on notera C et dont vous donnerez la valeur.

b. Montrer que la trajectoire est bornée.

c. Montrer que l'équation en coordonnées polaires de la trajectoire peut s'écrire :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

avec $p = C'/GM_t$ où C'est une constante que l'on déterminera.

d. Déterminer le paramètre p de la trajectoire en fonction de r_0 et e.
e. Déterminer l'excentricité de la trajectoire en fonction de α seulement.
f. Calculer les rayons au périgée et à l'apogée. Représenter la trajectoire en précisant le point de départ, l'axe polaire, les foyers.

3.

a. Exprimer l'énergie cinétique du satellite en fonction G, M_t, p, e et θ.

b. Exprimer aussi l'énergie potentielle du satellite en fonction de ces mêmes variables.

c. Déduire du théorème du viriel que $\langle\cos\theta\rangle = -e$. Commentez. Que pensez-vous de $\langle\sin\theta\rangle$.

4. Pour mieux cerner le résultat précédent, on cherche calcule les temps Δt_A et Δt_B qui sont respectivement les durées de passage du satellite pour un angle θ passant de $-\pi/2$ à $+\pi/2$ et pour un angle θ passant de $\pi/2$ à $3\pi/2$.

a. On rappelle la troisième loi de Kepler $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$. Exprimer la période T en fonction de p, e et C.

b. Exprimer la durée Δt_A et Δt_B. On donnera ces résultats en fonction de la période et d'une intégrale sans dimensions.

On donne en particulier :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - \frac{1}{2}\cos\theta)^2} = 0.195$$

Calculer Δt_A et Δt_B dans le cas $\mathrm{e} = -1/2$.

III - Cordes vibrantes et acoustique musicale

On modélise une corde de guitare comme une corde homogène de masse linéique (masse par unité de longueur de corde) μ, initialement au repos et confondu avec un axe Ox. On suppose que cette corde est inextensible, tendue par une tension T uniforme et constante. La corde est fixée à ses deux extrémités d'abscisses $x = 0$ et $x = L$. Les mouvements transversaux de la corde dans le plan xOy sont décrits par l'élongation transverse $u(x,t)$ autour de la position d'équilibre, solution de l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{A}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

1. a. Montrer que A est homogène à une grandeur qu'on pourra mettre sous la forme :

$$A = kT^{\alpha}\mu^{\beta}$$

Déterminer les constante α et β. On supposera par la suite que $k = 1$.

b. A quoi est homogène $\sqrt{A}$?

Ondes stationnaires

On cherche des solutions à l'équation de d'Alembert de la forme :

$$y(x,t) = B\sin(kx + \varphi_1) \times \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Où B est une constante.

1. Quelle relation lie les constantes k et ω ?
2. En écrivant les conditions aux limites, montrer que $\lambda = 2\pi/k$ et ω ne peuvent prendre qu'une série de valeurs discrètes que l'on exprimera en fonction de L, A et un entier n quelconque.
3. A chaque valeur de n correspond un mode propre. Exprimer l'élongation $y_n(x,t)$ du mode d'indice n.

Acoustique musicale

La corde la plus aigüe d'une guitare classique a pour une guitare d'adulte une longueur L=0,642 m. La masse linéique de cette corde est de 6,1 g/m. Le son de cette corde à vide a une fréquence $\nu = 329{,}5$ Hz (mi). 1. Quelle est la tension qu'il faut appliquer à la corde pour qu'elle soit accordée ?

2. Ou doit-on placer sa main pour émettre un son décalé d'un ton, d'un octave ?
3. Pour une oreille est sensible à une différence de fréquence de 20 Hz, quel est l'écart maximal à cette tension nominale qu'on peut s'autoriser pour ne pas entendre que la guitare est désaccordée ?

Aspect énergétique

On se place toujours dans le cas des ondes stationnaires et on considère le mode d'indice n.

1. Donner l'expression de l'énergie cinétique d'un élément de corde compris entre les points d'abscisses x et $x + dx$. En déduire l'énergie cinétique de la corde entre les points $x = 0$ et $x = L$ sous forme d'intégrale.
2. En utilisant l'expression de l'élongation obtenue précédemment, déterminer l'énergie cinétique totale de la corde sous la forme :

$$E_c = C_n\cos^2(\omega_n t + \varphi_n)$$

Exprimer $C_n$en fonction de n, T et L et B .

3. Exprimer la longueur d'une élément de corde situé entre x et $x + dx$, au deuxième ordre en $\partial y/\partial x$. En déduire l'allongement de la corde.
4. En déduire l'allongement de la corde entre 0 et L, sous forme d'une intégrale.

5. Calculer l'allongement de la cordre totale entre 0 et L.

En considérant la variation de hauteur de la masse m, déduire l'expression de l'énergie potentielle du système masse+cordre sous la forme :

$$E_p = D_n \sin^2(\omega_n t + \varphi_n)$$

Exprimer $D_n$en fonction de n, T et L et B .

6. Exprimer l'énergie mécanique totale de corde sous une forme simple.